

Variace bez opakování

Příklady

① Kolika způsoby lze rozdělit zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili mezi 8 závodníků?

1. m $\Rightarrow$ 2. m. $\Rightarrow$ 3. m.
 $p = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ zp.
(komb. prav. součinu)

hledáme uspořádané trojice z 8 závodníků,
záleží na pořadí (bez opakování) $\Rightarrow$ variace
 $V(3, 8) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ zp.

K-ČLENNÁ VARIACE z n prvků bez opakování (někdy variace k -té třídy z n prvků) je uspořádaná k -tice (záleží na pořadí prvků) sestavená z těchto n prvků, přičemž žádný prvek se neopakuje (tj. vyskytuje se v k -tici jen jednou)

Počet všech k -členných variací z n prvků bez opakování:

$$V(k, n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad n-k \geq 0; n \geq k; n, k \in \mathbb{N}$$

pf. $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

pf. $V(4, 7) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

Příklady

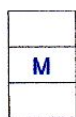
② K sestavení vlajky složené ze 3 různobarevných pruhů jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté. Určete

a) počet vlajek, které lze z těchto barev sestavit

vybereme 3 barvy z 5, zál. na pořadí (bez opak.) $\Rightarrow$ variace (bez opak.)

$$V(3, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ zp. } \left[\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \right]$$

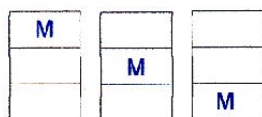
b) kolik z nich má modrý pruh uprostřed



modrý pruh uprostřed 1 zp. a pak 2 barvy ze 4 (bez opak., záleží na poř.)

$$p = 1 \cdot V(2, 4) = 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12 \text{ zp.}$$

c) kolik z nich má modrý pruh



1. zp. modrý pruh 3 zp. a pak vyberu jen 2 barvy ze 4 (bez opak., záleží na poř. – variace)

$$V(2, 4) = 4 \cdot 3 = 12$$

$$p = 3 \cdot V(2, 4) = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36 \text{ zp.}$$

2. zp. modrý nahoře **nebo** modrý uprostřed **nebo** modrý dole

vyb. 2 barvy ze 4

vyb. 2 barvy ze 4

vyb. 2 barvy ze 4

$$p = V(2, 4) + V(2, 4) + V(2, 4)$$

$$p = 3 \cdot V(2, 4) = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36 \text{ zp.}$$

d) kolik jich nemá červený pruh uprostřed

počet všech – počet s červeným pruhem uprostřed (viz modrý uprostřed)

$$p = V(3, 5) - V(2, 4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 60 - 12 = 48$$

- ③ Výbor sportovního klubu tvoří 6 mužů a 4 ženy. Určete, kolika způsoby z nich lze vybrat
a) předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře

zál. na pořadí, vybereme uspoř. čtveřice z $(6 + 4)$ osob, bez opak. $\Rightarrow$ variace bez op.
 $p = V(4, 10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$

- b) funkcionáře podle a) tak, aby předseda byl muž a místopředseda žena nebo obráceně

vyb. 1 P z 6 M a 1 MP ze 4 Ž a 2 ze zbýv. $(10 - 2)$ osob (M a Ž)

$$p_1 = V(1, 6) \cdot V(1, 4) \cdot V(2, 8)$$

nebo vyb. 1 P ze 4 Ž a 1 MP z 6 M a 2 ze zbýv. $(10 - 2)$ osob (M a Ž)

$$p_2 = V(1, 4) \cdot V(1, 6) \cdot V(2, 8)$$

$$p = p_1 + p_2 = 2 \cdot V(1, 6) \cdot V(1, 4) \cdot V(2, 8) = 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 = 2\,688$$

- c) funkcionáře podle a) tak, aby právě jedna byla žena

vyb. (1 P ze 4 Ž a 3 F z 6 M) nebo (1 MP ze 4 Ž a 3 F z 6 M) nebo (1 J ze 4 Ž a 3 F z 6 M) nebo (1 H z 4 Ž a 3 F z 6 M)

$$p = V(1, 4) \cdot V(3, 6) + V(1, 4) \cdot V(3, 6) + V(1, 4) \cdot V(3, 6) + V(1, 4) \cdot V(3, 6)$$

$$p = 4 \cdot V(1, 4) \cdot V(3, 6) = 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1\,920$$

- ④ Určete

- a) počet všech nejvýše pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá z deseti číslic vyskytuje nejvýše jednou

(počet všech p = počet s nulou na začátku p_1 + počet bez nuly na začátku p_2)

$$p = p_1 + p_2 \Rightarrow p_2 = p - p_1$$

p ... počet všech (i s nulou na začátku) max. pěticiferných

$$p = V(5, 10) + V(4, 10) + V(3, 10) + V(2, 10) + V(1, 10)$$

p_1 ... počet max. pěticiferných s nulou na začátku

0 0 ... 0 .. 0 . číslo 0 $\notin$ N

4 z 9 3 z 9 2 z 9 1 z 9 1

$$p_1 = V(4, 9) + V(3, 9) + V(2, 9) + V(1, 9) + 1$$

počet max. pěticiferných přir. čísel (bez nuly na začátku)

$$p_2 = p - p_1 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 10 \cdot 9 \cdot 8 + 10 \cdot 9 + 10 -$$

$$- (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8 + 9 + 1) = 30\,240 + 5\,040 + 720 + 90 + 10 -$$

$$- (3\,024 + 504 + 72 + 9 + 1) = 36\,100 - 3\,610 = 32\,490$$

- b) kolik z nich je menších než 50 000?

pěticiferná čísla začínající 1 nebo 2 nebo 3 nebo 4 1 2 3 4
a na zbýv. místech lib. 4 číslice z 9 $p_1 = 4 \cdot V(4, 9)$

nebo

nejvýše čtyřciferná bez 0 na začátku (tj. čtyřcif. nebo trojcif. nebo dvojcif. nebo jednocif.)

0 ... 0 .. 0 . 0

$$p_2 = V(4, 10) + V(3, 10) + V(2, 10) + V(1, 10) - [V(3, 9) + V(2, 9) + V(1, 9) + 1]$$

$$\text{celkem } p = p_1 + p_2 = 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 10 \cdot 9 \cdot 8 + 10 \cdot 9 + 10 -$$

$$- (9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8 + 9 + 1) = 17\,370$$

- ⑥ Určete počet všech nejvýše čtyřciferných čísel s různými číslicemi, jsou-li sestavena z číslic 0, 2, 4, 6, 8.

jednocif. $V(1, 5) = 5$ (0 také – není podm., že přirozená)

dvojcif. $V(2, 5) - V(1, 4) = 5 \cdot 4 - 4 = 16$ (počet všech – počet s 0 na zač.)
[0 . . 1 ze 4, tj. bez 0)]

trojcif. $V(3, 5) - V(2, 4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 12 \cdot (5 - 1) = 48$ [0 . . 2 ze 4]

čtyřcif. $V(4, 5) - V(3, 4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \cdot (5 - 1) = 96$ [0 . . . 3 ze 4]

$$p = 5 + 16 + 48 + 96 = 165$$

- ⑥ O telefonním čísle víme, že je šestimístné, začíná sedmičkou, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné 25. Kolik telefonních čísel přichází v úvahu?

6místné tel. číslo, zač. 7, bez opak., děl. 25

7 . . . 0 0 nelze – číslice by se opakovaly

7 . . . 2 5 } vyb. 3 čísla z $(10 - 3) \Rightarrow p = 2 \cdot V(3, 7) = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 420$
7 . . . 5 0 }

7 . . . 7 5 nelze – číslice by se opakovaly

- ⑦ Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, vyučuje-li se 12ti předmětům a každý nejvýše 1 vyučovací hodinu denně, má-li se skládat z 6 vyučovacích hodin

a) bez omezení

vybereme 6 předmětů z 12 (bez opak., zál. na pořadí)

$$p = V(6, 12) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 (= 665\,280)$$

b) v kolika z nich je daný předmět zařazen na první vyučovací hodinu

P vybíráme už jen 5 předmětů z 11

$$p = V(5, 11) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 (= 55\,440)$$

c) v kolika z nich se vyskytuje daný předmět

Daný předmět 1. hod. nebo 2. hod. nebo 3. hod. nebo ... nebo 6. hod. a k němu vždy vybereme 5 předmětů z (už jen) 11

$$\begin{array}{cccccccccccc} P & . & . & . & . & . & \vee & . & P & . & . & . & . & \vee & . & . & P & . & . & \vee & . & . & . & P & . & \vee & . & . & . & . & P & . & \vee & . & . & . & . & P \\ p & = & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) & + & V(5, 11) \\ p & = & 6 \cdot V(5, 11) & (= 332\,640) \end{array}$$

- ⑧ Kolika způsoby může k studentů obsadit m míst ve třídě ($k = 27, m = 30$)

uspořádané k -tice z m prvků

$$V(k, m) = \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{30!}{(30-27)!} = \frac{30!}{3!} = \frac{30!}{6} = 4,42 \cdot 10^{31} \text{ zp.}$$

- ⑨ Určete počet možných výsledků utkání, jestliže víte, že utkání neskončilo nerozhodně a že žádné z obou družstev nestřelilo více než 20 a méně než 10 branek.

vyb. uspoř. dvojice čísel bez opak. (neskončilo nerozhodně) z čísel $\overbrace{10, 11, 12, \dots, 19, 20}^{11 \text{ čísel}}$

$$p = V(2, 11) = 11 \cdot 10 = 110$$